Systèmes Linéaires Continus Invariants

Exercice de cours
Résolution d'équations différentielles

Q1. ***En utilisant les transformées de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes.***

$$2\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 4y(t) = \mathbf{u}(\mathbf{t}) \qquad\qquad y(0^+) = 1 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}(\mathbf{t}) \qquad\qquad y(0^+) = 0 \qquad y'(0^+) = 0 \tag{2}$$

• **Équation 1** Transformons l'équation :

$$\mathscr{L}\left[2\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+4y(t)\right]=\mathscr{L}\left[\mathbf{u(t)}\right] \tag{3}$$

$$2\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+4\mathscr{L}\left[y(t)\right]=\mathscr{L}\left[\mathbf{u(t)}\right] \quad \text{(par linéarité)} \tag{4}$$

$$2\left(pY(p)-y(0^+)\right)+4Y(p)=\frac{1}{p} \quad \text{(d'après le théorème de la dérivée)} \tag{5}$$

$$Y(p)(2p+4)=\frac{1}{p}+2 \tag{6}$$

$$Y(p)(2p+4)=\frac{1+2p}{p} \tag{7}$$

$$Y(p)=\frac{1+2p}{p(2p+4)} \tag{8}$$

Décomposons en éléments simples :

$$Y(p)=\frac{1+2p}{p(2p+4)} \tag{9}$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{2p+4} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Déterminons A :

$$\lim_{p\mapsto 0} p\times Y(p)=\lim_{p\mapsto 0} p\times\frac{1+2p}{p(2p+4)} \tag{12}$$

$$=\lim_{p\mapsto 0}\frac{1+2p}{2p+4} \tag{13}$$

$$=\frac{1}{4} \tag{14}$$

$$=\lim_{p\mapsto 0} p\times\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{2p+4}\right) \tag{15}$$

$$=\lim_{p\mapsto 0}\left(A+\frac{Bp}{2p+4}\right) \tag{16}$$

$$=A \tag{17}$$

On en déduit que : $\boxed{A=\frac{1}{4}}$.

Déterminons B :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\mapsto -2}(2p+4)\times Y_{(p)} &= \lim_{p\mapsto -2}(2p+4)\times\frac{1+2p}{p(2p+4)} && (18)\\
&= \lim_{p\mapsto -2}\frac{1+2p}{p} && (19)\\
&= \frac{3}{2} && (20)\\
&= \lim_{p\mapsto -2}(2p+4)\times\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{2p+4}\right) && (21)\\
&= \lim_{p\mapsto -2}\left(\frac{A(2p+4)}{p}+B\right) && (22)\\
&= B && (23)
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\boxed{B=\frac{3}{2}}$.

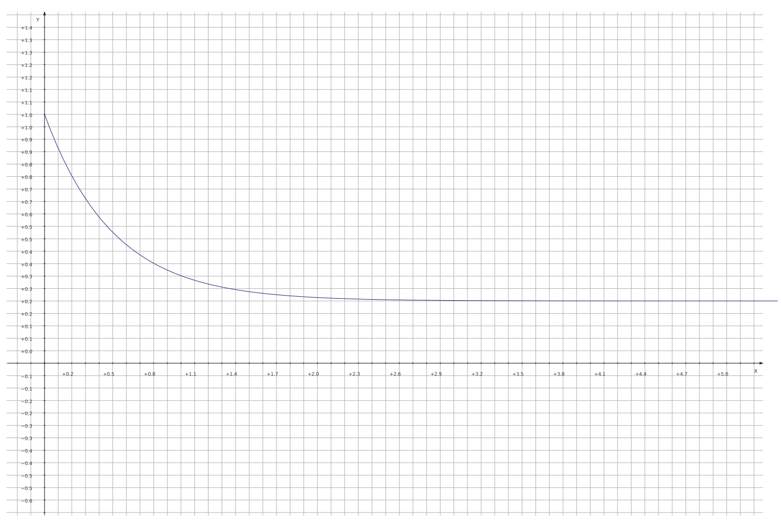
Au final :

$$Y_{(p)}=\frac{\frac{1}{4}}{p}+\frac{\frac{3}{2}}{2p+4} \qquad (24)$$

Procédons à la transformée inverse :

$$\begin{aligned}
y_{(t)} &= \mathscr{L}^{-1}\left[Y_{(p)}\right] && && (25)\\
&= \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]+\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2p+4}\right] && && (26)\\
&= \frac{1}{4}\mathbf{u}_{(\mathbf{t})}+\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{p+2}\right] && && (27)\\
&= \frac{1}{4}\mathbf{u}_{(\mathbf{t})}+\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] && \text{Par linéarité} && (28)\\
&= \frac{1}{4}\mathbf{u}_{(\mathbf{t})}+\frac{3}{4}e^{-2t}\mathbf{u}_{(\mathbf{t})} && && (29)
\end{aligned}$$

Au final : $\boxed{y_{(t)}=\frac{1}{4}\left(1+3e^{-2t}\right)\mathbf{u}_{(\mathbf{t})}}$



- **Equation 2** :

Transformée de l'équation :

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathscr{L}\left[\mathbf{u(t)}\right] \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] + 3\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathscr{L}\left[\mathbf{u(t)}\right] \qquad \text{Par linéarité} \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow p^2 Y(p) + 3pY(p) = \frac{1}{p} \qquad \text{Car conditions d'Heaviside.} \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow Y(p)p(p+3) = \frac{1}{p} \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2(p+3)} \tag{34}$$

Décomposition en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{1}{p^2(p+3)} \tag{35}$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3} \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

Déterminons B :

$$\lim_{p\mapsto 0} p^2 \times Y(p) = \lim_{p\mapsto 0} p^2 \times \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3}\right) \tag{38}$$

$$= \lim_{p\mapsto 0}\left(Ap + B + \frac{Cp}{p+3}\right) \tag{39}$$

$$= B \tag{40}$$

$$= \lim_{p\mapsto 0} p^2 \times \frac{1}{p^2(p+3)} \tag{41}$$

$$= \lim_{p\mapsto 0} \frac{1}{p+3} \tag{42}$$

$$= \lim_{p\mapsto 0} \frac{1}{3} \tag{43}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{3} \tag{44}$$

Déterminons C :

$$\lim_{p\mapsto -3} (p+3) \times Y(p) = C \tag{45}$$

$$= \frac{1}{9} \tag{46}$$

Déterminons A :

$$\lim_{p \mapsto +\infty} p \times Y_{(p)} = A + C \tag{47}$$

$$= 0 \tag{48}$$

$$\Leftrightarrow A = -C = -\frac{1}{9} \tag{49}$$

Au final :

$$Y_{(p)} = \frac{-\frac{1}{9}}{p} + \frac{\frac{1}{3}}{p^2} + \frac{\frac{1}{9}}{p+3} \tag{50}$$

Transformée inverse :

$$y_{(t)} = -\frac{1}{9}\mathbf{u}_{(\mathbf{t})} + \frac{1}{3}t\mathbf{u}_{(\mathbf{t})} + \frac{1}{9}e^{-3t}\mathbf{u}_{(\mathbf{t})} \tag{51}$$

$$= \frac{1}{9}\left(3t - 1 + e^{-3t}\right)\mathbf{u}_{(\mathbf{t})} \tag{52}$$