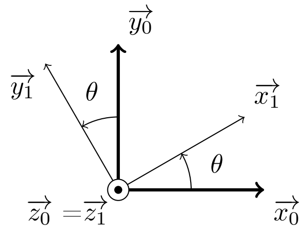
Corrigé

DEVOIR - MAISON

Entraînement aux calculs vectoriels

Soit $\mathscr{B}_0 = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ et $\mathscr{B}_1 = (\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ deux bases orthonormées directes, telles que :

- $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}}\right) = \theta$



(Note : on évitera de tout projeter dans une même base et on fera les calculs directement d'une base à l'autre. On demande à ce que les vecteurs soient écrits linéairement (sous la forme : $\overrightarrow{V} = **\overrightarrow{x_0} + **\overrightarrow{y_0} + **\overrightarrow{z_0}$, par exemple) et non pas en colonne)

Q1. ***Exprimer $\overrightarrow{x_1}$ dans le base $\mathscr{B}_0$. De même, exprimer $\overrightarrow{y_1}$ dans $\mathscr{B}_0$. Exprimer également $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ dans la base $\mathscr{B}_1$.***

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_1} &= \cos(\theta)\overrightarrow{x_0} + \sin(\theta)\overrightarrow{y_0} \\
\overrightarrow{y_1} &= -\sin(\theta)\overrightarrow{x_0} + \cos(\theta)\overrightarrow{y_0} \\
\overrightarrow{x_0} &= \cos(\theta)\overrightarrow{x_1} - \sin(\theta)\overrightarrow{y_1} \\
\overrightarrow{y_0} &= \sin(\theta)\overrightarrow{x_1} + \sin(\theta)\overrightarrow{y_1}
\end{aligned}$$

Q2. ***Calculer : $\overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{y_1}$***

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{x_1} &= \cos(\theta) \\
\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_1} &= 0 && \text{car } \overrightarrow{x_0} \perp \overrightarrow{y_0} \\
\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_0} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\
\overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{y_1} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Q3. ***Calculer : $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{x_1}$***

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_0} &= \overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1} \\
\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_1} &= -\overrightarrow{z_0} = -\overrightarrow{z_1} \\
\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_1} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\overrightarrow{z_0} = \cos(\theta)\overrightarrow{z_0} \\
\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{x_1} &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\overrightarrow{z_0} = -\cos(\theta)\overrightarrow{z_0}
\end{aligned}$$

Soit les vecteurs $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{x_0} + 3\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{z_1} + 2\overrightarrow{x_1}$

Q4. ***Calculer $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ en développant les calculs.***

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} &= (2\overrightarrow{x_0} + 3\overrightarrow{y_0}) \cdot (\overrightarrow{z_1} + 2\overrightarrow{x_1}) \\
&= 2\overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{z_1} + 2\overrightarrow{x_0} \cdot 2\overrightarrow{x_1} + 3\overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{z_1} + 3\overrightarrow{y_0} \cdot 2\overrightarrow{x_1} \\
&= 2 \times 0 + 4\cos(\theta) + 3 \times 0 + 6\sin(\theta) \\
&= 4\cos(\theta) + 6\sin(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} &= (2\overrightarrow{x_0} + 3\overrightarrow{y_0}) \wedge (\overrightarrow{z_1} + 2\overrightarrow{x_1}) \\
&= 2\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{z_1} + 2\overrightarrow{x_0} \wedge 2\overrightarrow{x_1} + 3\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{z_1} + 3\overrightarrow{y_0} \wedge 2\overrightarrow{x_1} \\
&= -2\overrightarrow{y_0} + 4\sin(\theta)\overrightarrow{z_0} + 3\overrightarrow{x_0} - 6\cos(\theta)\overrightarrow{z_0} \\
&= 3\overrightarrow{x_0} - 2\overrightarrow{y_0} + (4\sin(\theta) - 6\cos(\theta))\,\overrightarrow{z_0}
\end{aligned}$$