Lycée Gustave Eiffel de Dijon

Classe préparatoire P.T.S.I.

Année 2017 - 2018

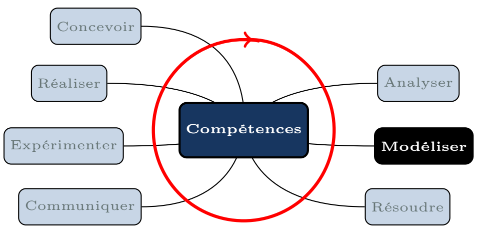
Cinématique

5 - Modélisation des petits déplacements

Table des matières

Objectif :

- Être capable d'écrire le torseur de petits déplacements



11 décembre 2017

I. Petits déplacements d'un solide

1 Déplacement des points d'un solides

Soient 2 points A et B appartenant au solide (1) en mouvement par rapport au repère R_0. (1) évolue entre un instant t_1 (position 1) et un instant t_2 (position 2) (fig.1). Le point A devient alors le point A'. Le point B devient le point B'.

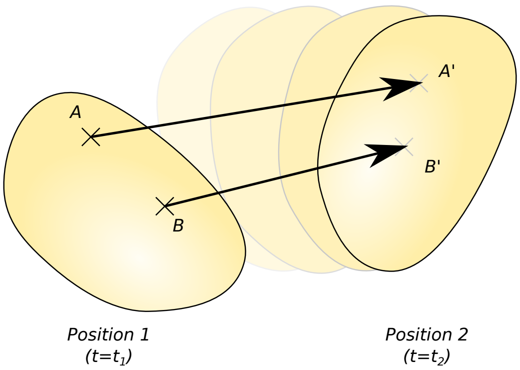


FIGURE 1 – *Déplacement du solide.*

> **Définition 1 : *Vecteur déplacement***
>
> Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est appelé **vecteur déplacement** du point A par rapport à R_0 entre les dates t_1 et t_2. On le note généralement $\overrightarrow{U_{(A\in 1/0)}}$.

La position 2 est à priori quelconque par rapport à la position 1 et il n'existe pas toujours de relation simple entre $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$. Toutefois , si l'on considère une position 2 très proche de la position 1 (par exemple si $(t_1 - t_2) = dt$ avec $dt \mapsto 0$) alors ces vecteurs déplacements sont **presque** colinéaires aux vecteurs vitesses.

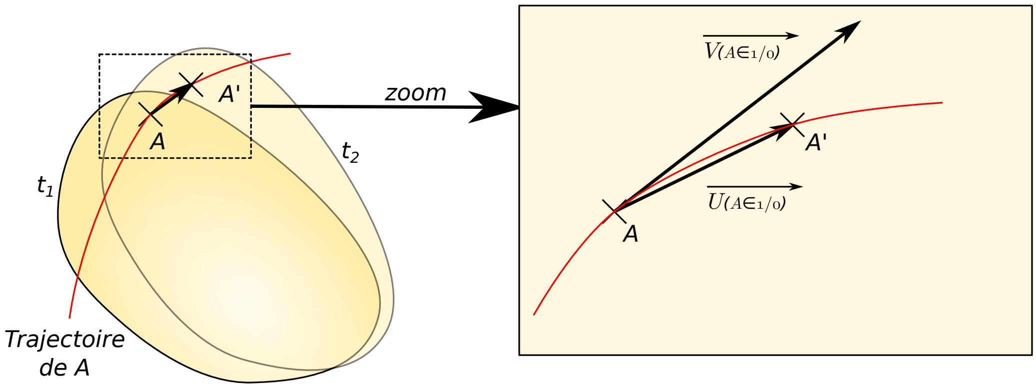


FIGURE 2 – *Petit déplacement.*

> **Propriété 1 :**
>
> Dans le cadre d'un petit déplacement, on **fait l'hypothèse que** les vecteurs vitesse et déplacement sont colinéaires :
>
> $$\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} \approx \overrightarrow{0} \quad (1)$$

De plus, on a :

$$\lim_{dt \to 0} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}\ dt$$

2 Petits déplacement des points d'un solide

Soit le torseur cinématique définissant le mouvement d'un solide (1) par rapport (0) :

$$\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(1/2)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}\end{array}\right\}$$

D'après la formule des moments, on a :

$$\overrightarrow{V_{(B\in 1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}$$

On pose $t_2 = (t_1 + dt)$ avec dt petit. En multipliant l'expression précédente par dt, on obtient :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{(B\in 1/0)}}\ dt}_{\text{Petit déplacement au point } B} = \underbrace{\overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}\ dt}_{\text{Petit déplacement au point } A} + \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\left(\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}\ dt\right)}_{\text{Petite rotation de } 1/0} \tag{2}$$

On notera alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dU_{(B\in 1/0)}} &= \overrightarrow{V_{(B\in 1/0)}}\ dt \\ \overrightarrow{dU_{(A\in 1/0)}} &= \overrightarrow{V_{(A\in 1/0)}}\ dt \\ \overrightarrow{d\theta_{(1/0)}} &= \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}\ dt\end{aligned}$$

Définitions 2 :

- $\overrightarrow{dU_{(A\in 1/0)}}$ est appelé "**vecteur petit déplacement**" de 1 par rapport à 0, au point A, à l'instant t.
- $\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}$ est appelé "**vecteur petite rotation**" de 1 par rapport à 0 à l'instant t.

Propriété 2 :

On remarquera que l'équation 2 représente un **champ de moment** :

$$\overrightarrow{dU_{(B\in 1/0)}} = \overrightarrow{dU_{(A\in 1/0)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}$$

Un petit déplacement peut donc être décrit par un torseur.

Définition 3 : ***Torseur des petits déplacements***

On appelle **torseur des petits déplacements** le torseur dont la résultante est le vecteur "petite rotation" et le moment est le vecteur "petit déplacement" :

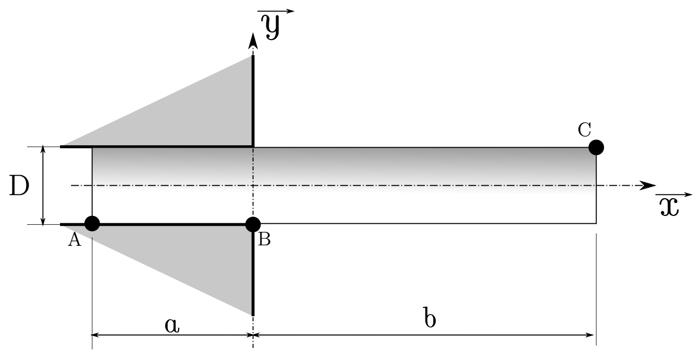
$$\left\{\mathscr{D}_{(1/0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}} \\ \overrightarrow{dU_{(A\in 1/0)}}\end{array}\right\}$$

Remarques 1 :

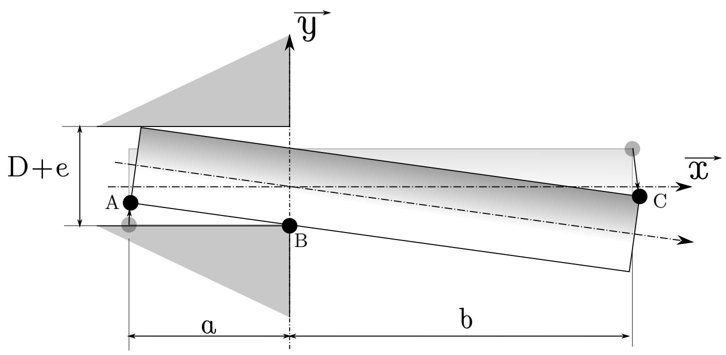
- Le torseur de petits déplacement peut être appliqué pour n'importe quel type de petits déplacements entre un position initiale et une position finale (même si cela ne dépend pas du temps). Il faut juste que ces postions soient très proches.
- Dans les mécanismes usuels, l'ordre de grandeur des petits déplacement est le millimètre, voir le centième de millimètre. De manière général, on peut considérer un déplacement petit s'il est 100 fois inférieur à la taille globale de la pièce.
- L'utilisation des petits déplacements intervient notamment dans les domaines comme la résistance des matériaux, la métrologie ou l'étude des dispersions en fabrication.

Exemple 1 :

Soit un arbre (S_1) de diamètre $\varnothing D = 20\,\text{mm}$, emmanché dans un alésage (S_0). On note A, B et C trois points tels que définis sur la figure ci-dessous. On note $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{x} = a = 40\,\text{mm}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{x} = b = 80\,\text{mm}$. Dans cet exercice, on suppose qu'il est important que le point C soit le mieux positionné possible : Le cahier des charges fonctionnel impose que ce point ne se déplace pas au delà de 0,4 mm.



Or, suite à un défaut de fabrication, le diamètre de l'alésage est légèrement plus grand d'une valeur $e = 0{,}2\,\text{mm}$: $\varnothing D \rightarrow \varnothing(D+e)$. Il en résulte un défaut de position de l'arbre. On notera θ_{10} le défaut d'inclinaison (inconnu) de notre arbre.



On suppose au le point B reste fixe, mais que le point A s'est déplacé d'un vecteur $\overrightarrow{dU_{(A\in S_1/S_0)}} \approx e\,\overrightarrow{y}$. On cherche à savoir quel est le petit déplacement subit par le point C et en particulier s'il respecte encore le cahier des charges.

Pour cela, on va chercher à définir le torseur petit déplacement $\left\{\mathscr{D}_{(S_1/S_0)}\right\}$. Cependant, on ne connaît pas la résultante de ce torseur. Il faut donc la trouver.

On suppose le problème plan.

Q1. ***Déterminer analytiquement le torseur petit déplacement au point B.***

$\boxed{\textbf{Q2.}}$ ***Déplacer ce torseur au point A et en déduire le vecteur petite-rotation.***

$\boxed{\textbf{Q3.}}$ ***Une fois ce vecteur trouvé, il devient facile de calculer le déplacement du point C. Calculer $\overrightarrow{dU_{(C\in S_1/S_0)}}$***

Questions de cours

Q1. ***Donner le nom et la définition des éléments de réduction du torseur de petits déplacements.***

On suppose que (S_1) a subit un petit déplacement décrit par le torseur : $\left\{\mathscr{D}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} 2\overrightarrow{x_0} + 3\overrightarrow{y_0} \\ 2\overrightarrow{x_0} \end{array}\right\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_0}$.

Q2. ***Déterminer le petit déplacement d'un point*** $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{R_0}$ ***et*** $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$***.***

Ce petit déplacement a eu lieu en $2\,\mathrm{s}$.

Q3. ***En déduire le torseur cinématique au point*** B ***par rapport à*** R_0***.***