Lycée Gustave Eiffel de Dijon

Classe préparatoire P.T.S.I.

Année 2017 - 2018

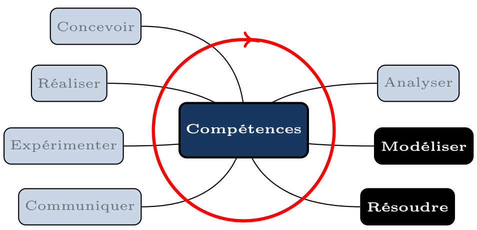
Cinématique

1 - Lois d'Entrée/Sortie

Table des matières

Objectif :

- À partir d'un paramétrage donné, savoir définir les paramètres d'entrée, de sortie et les paramètres *inutiles*.
- Savoir réaliser une fermeture géométrique.
- Savoir réaliser une fermeture cinématique (En lien avec le cours suivant).



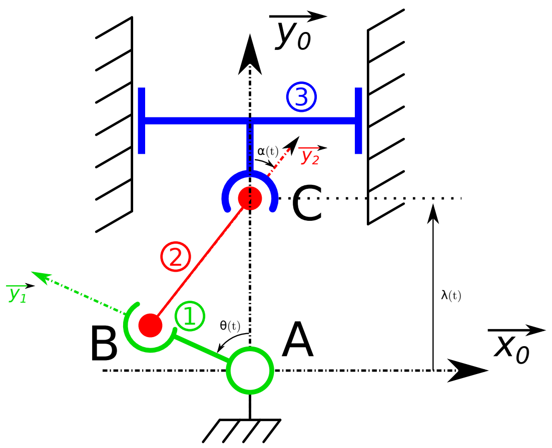
21 novembre 2017

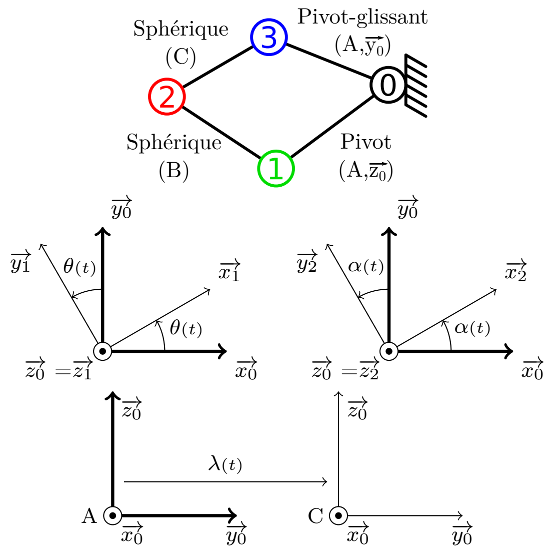
I. Introduction

Dans ce cours, on supposera que l'on ait affaire à un mécanisme **déjà paramétré**.

Exemple 1 : *Système bielle-manivelle de pompe*

Soit un système **bielle-manivelle** de pompe.





- La pièce (0) est le **bâti** de la pompe, considéré comme notre référentiel principal.
- La pièce (1) est un **excentrique**, et est entraîné par un moteur à une vitesse (c'est notre pièce *motrice*.
- La pièce (2) est une **bielle**, permettant de transmettre le mouvement de l'excentrique au moteur.
- La pièce (3) est le **piston**, permettant d'aspirer, comprimer et refouler le fluide à pomper.

On pose : $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{y_1}$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}}\right) = \theta(t)$, $\overrightarrow{BC} = l\,\overrightarrow{y_2}$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}}\right) = \alpha(t)$, $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\overrightarrow{y_0}$.

Cet exemple constituera un fil rouge pour le reste du cours.

Définition 1 : *Loi d'entrée/sortie*

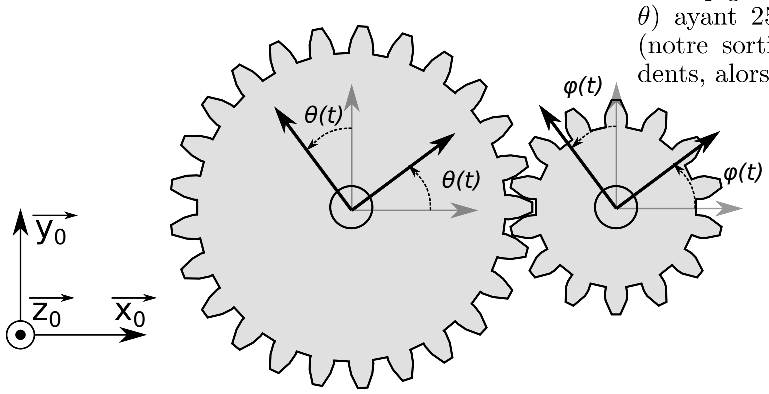
Une **loi d'entrée/sortie** est une **relation mathématique** reliant un paramètre d'entrée « a » (souvent : paramètre lié à l'actionneur) à un paramètre de sortie « b » (souvent : lié à la fonction du mécanisme), **indépendamment des autres paramètres** (dits « *paramètres inutiles* ») :

$$b = f(a) \tag{1}$$

Exemple 2 : *Paramètres en positions, pour la pompe*

- **Paramètre d'entrée :**
- **Paramètre de sortie :**
- **Paramètre inutile :**

Exemple 3 : *Loi d'Entrée/Sortie d'un engrenage*



Si un pignon 1 (notre entrée, repéré par l'angle θ) ayant 25 dents engrène avec un pignon 2 (notre sortie, repéré par l'angle ϕ) ayant 14 dents, alors la loi d'entrée-sortie sera :

Quand elle est plus complexe, la loi d'entrée/sortie peut être obtenue par **fermeture géométrique** (relation entre les positions) ou par **fermeture cinématique** (relation entre les vitesses). Ces fermetures sont issues du **graphe des structures**. La relation entre les vitesses peut aussi être obtenue en dérivant la relation entre les positions.

II. Loi d'entrée/sortie en position

Pour connaître la position de sortie en fonction du paramètre de position d'entrée, on réalise une **fermeture géométrique**.

Définition 2 : *Fermeture géométrique*

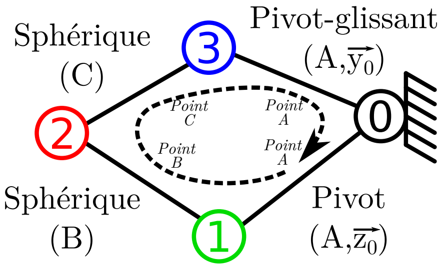
On appelle « **fermeture géométrique** » une somme vectorielle (relation de Chasles) reliant des points d'un mécanisme : Cette somme vectorielle part d'un point, et revient à ce même point, en passant pas toutes les liaisons de la chaîne cinématique.

Méthode 1 : *Fermeture géométrique*

1. Repérer, sur le graphe de structure, le *chemin* a parcourir, en passant par le paramètre d'entrée et celui de sortie.
2. Réaliser la fermeture géométrique (relation de Chasles qui revient au même point : c'est une équation vectorielle).
3. Projeter cette relation vectorielle sur chacun des axes, dans une base choisie.
4. Éliminer le paramètre inutile, le cas échéant.
5. Essayer (si possible) de mettre la relation sous la forme $param_{\text{sortie}} = f_{(param_{\text{entrée}})}$.
6. (Facultative) Tracer la courbe d'entrée/sortie.

Exemple 4 : *Loi d'Entrée/Sortie en position de la pompe*

- **On repère la boucle sur le graphe** :



Ici , nous passerons par les points : $A - B - C - A$.
(cette étape est triviale quand il n'y a qu'une seule boucle, mais est nécessaire pour des graphes plus complexes).

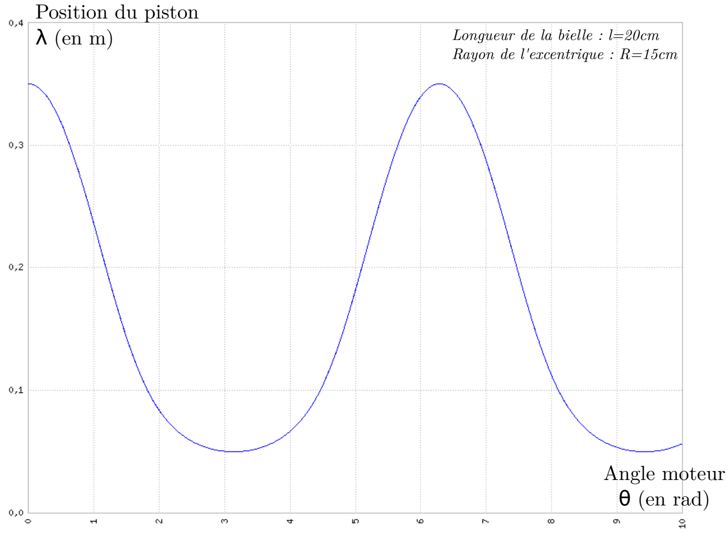
- **On réalise la fermeture géométrique** :

- **On projette sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$** :

- **Éliminer le paramètre inutile** : Le paramètre inutile est :

- **Mettre sous la forme $\lambda_{(t)} = f_{(\theta(t))}$** :

- **Courbe représentative** :



Astuce 1 :
Quand le paramètre inutile se trouve dans un sinus et cosinus (dans chacune des projections) :
- On isole ces termes dans chaque équation,
- On met chaque équation au carré,
- On somme les équations (car $\cos^2 + \sin^2 = 1$).

III. Loi d'entrée/sortie en vitesse

L'objectif est d'être capable d'estimer la vitesse (ou vitesse de rotation) d'un paramètre de sortie $\dot{\beta}(t)$ en fonction de la vitesse (ou vitesse de rotation) du paramètre d'entrée $\dot{\alpha}(t)$ *et du paramètre d'entrée lui même* $\alpha(t)$:

$$\dot{\beta}(t) = g(\dot{\alpha}(t),\alpha(t)) \tag{2}$$

Pour ce faire, on utilisera, au choix, deux méthodes :
- la dérivation de la loi d'entrée/sortie en position
- la fermeture cinématique

1 Méthode 1 : Dérivation de la loi d'entrée/sortie en position

Méthode 2 :
Pour obtenir la loi d'entrée/sortie en vitesse, on dérive la loi d'entrée sortie en position.

Exemple 5 : ***Pompe***
Recherchons la loi d'entrée/sortie en vitesse (i.e. la vitesse du piston par rapport à la vitesse de rotation du moteur)

- **Rappel de la loi d'entrée/sortie en position :**

$$\lambda_{(t)} = \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2(\theta_{(t)})} + R\cos(\theta_{(t)}) \qquad (3)$$

2 Méthode 2 : Fermeture cinématique

Définition 3 : *Fermeture cinématique*

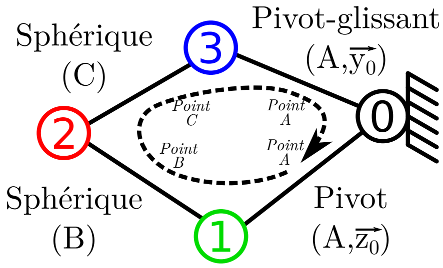
Dans une chaîne cinématique, la **fermeture cinématique** est l'expression d'un mouvement d'une pièce par rapport à elle-même (donc un mouvement nul), en procédant à une **composition de mouvement** en cascade en passant par les référentiels de **toutes les pièces** de cette chaîne.

Méthode 3 : *Fermeture cinématique*

1. Repérer, sur le graphe de structure, le *chemin* a parcourir, en passant par le paramètre d'entrée et celui de sortie.
2. Choisir une pièce, et dire que son mouvement par rapport à elle-même est nul.
3. Décomposer ce mouvement en passant par les référentiels de toutes les pièces de la chaîne (Mvt 1/1 = Mvt 1/2 + Mvt 2/3 + Mvt 3/4 + ... + Mvt n/0 + Mvt 0/1).
4. Exprimer chaque torseur cinématique en un même point, en fonction des paramètres géométriques.
5. Exprimer les relations vectorielles des éléments de réduction (souvent, celle en vitesse suffit)
6. Projeter la relation obtenue dans une base (sur chaque axe).
7. Supprimer les paramètres **cinématiques** inutiles (Les autres paramètres non-dérivés pourront rester, bien que devant être théoriquement calculés via des fermetures géométriques)
8. Essayer (si possible) de mettre la relation sous la forme $param_{\text{sortie}} = f_{(param_{\text{entrée}}, param_{autres})}$.

Exemple 6 : *Pompe*

- **On repère la boucle sur le graphe :**



Ici , nous passerons par les points : $A - B - C - A$.
(cette étape est triviale quand il n'y a qu'une seule boucle, mais est nécessaire pour des graphes plus complexes).

- **Choisir une pièce, et dire que son mouvement par rapport à elle-même est nul :**

$$\text{Prenons la pièce 1 :} \quad \left\{\mathscr{V}_{(1/1)}\right\} = \{\mathscr{T}_{\text{nul}}\} \tag{4}$$

- **Décomposer ce mouvement en passant par toutes les pièces de la chaîne :**

$$\left\{\mathscr{V}_{(1/1)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(0/3)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(3/2)}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\} = \{\mathscr{T}_{\text{nul}}\} \tag{5}$$

- **Exprimer chaque torseur cinématique en un même point, en fonction des paramètres géométriques.** On va choisir le point A :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}} \qquad \text{car } A \text{ centre de la liaison } 1/0 \tag{6}$$

$$\left\{\mathscr{V}_{(0/3)}\right\} = -\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\} \tag{7}$$

$$= -{}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\} \qquad \text{car } 3/0 \text{ mouvement de translation} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\{\mathscr{V}_{(0/3)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ -\dot{\lambda}(t)\overrightarrow{y_0}\end{array}\right\}} \tag{9}$$

$$\left\{\mathscr{V}_{(3/2)}\right\} = -\left\{\mathscr{V}_{(2/3)}\right\} \tag{10}$$

$$= {}_C\left\{\begin{array}{c}-\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\} \qquad \text{car } C \text{ centre de la liaison } 3/2 \tag{11}$$

$$= {}_A\left\{\begin{array}{c}-\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{z_0}\\ \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(3/2)}}\end{array}\right\} \qquad \text{(Déplacement au point } A\text{)} \tag{12}$$

$$= {}_A\left\{\begin{array}{c}-\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{z_0}\\ (\lambda(t)\overrightarrow{y_0}) \wedge (-\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{z_0})\end{array}\right\} \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\{\mathscr{V}_{(3/2)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}-\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{z_0}\\ -\lambda(t)\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{x_0}\end{array}\right\}} \tag{14}$$

$$\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\} = \underset{B}{\left\{\begin{array}{c} \dot{\gamma}(t)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \quad \text{car } B \text{ centre de la liaison } 2/1 \tag{15}$$

$$\text{et } \gamma(t) \text{ param. de } 2/1 \tag{16}$$

$$= \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} \dot{\gamma}(t)\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} \end{array}\right\}} \quad \text{(Déplacement au point } A\text{)} \tag{17}$$

$$= \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} \dot{\gamma}(t)\overrightarrow{z_0} \\ (R\overrightarrow{y_1}) \wedge (\dot{\gamma}(t)\overrightarrow{z_0}) \end{array}\right\}} \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} \dot{\gamma}(t)\overrightarrow{z_0} \\ R\dot{\gamma}(t)\overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}}} \tag{19}$$

- **Exprimer les relations vectorielles des éléments de réduction.**

$$\left\{\begin{array}{lll} \overrightarrow{0} & = \dot{\theta}(t)\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{0} - \dot{\alpha}(t)\overrightarrow{z_0} + \dot{\gamma}(t)\overrightarrow{z_0} & \text{(Résultante)} \\ \overrightarrow{0} & = \overrightarrow{0} - \dot{\lambda}(t)\overrightarrow{y_0} - \lambda(t)\dot{\alpha}(t)\overrightarrow{x_0} + R\dot{\gamma}(t)\overrightarrow{x_1} & \text{(Moment)} \end{array}\right. \tag{20}$$

- **Projeter la relation obtenue dans une base.** Nous choisissons de projeter dans la base $\mathscr{B}_0$
 $\mapsto$ Résultante (vitesse de rotation), projetée sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$0 = \dot{\theta}(t) - \dot{\alpha}(t) + \dot{\gamma}(t) \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\gamma}(t) = \dot{\alpha}(t) - \dot{\theta}(t) \tag{22}$$

$\mapsto$ Moment (vitesses), projeté sur $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$:

$$\left\{\begin{array}{lll} 0 & = -\lambda(t)\dot{\alpha}(t) + R\dot{\gamma}(t)\cos(\theta(t)) & \text{Proj. sur } \overrightarrow{x_0} \\ 0 & = -\dot{\lambda}(t) + R\dot{\gamma}(t)\sin(\theta(t)) & \text{Proj. sur } \overrightarrow{y_0} \end{array}\right. \tag{23}$$

- **Supprimer les paramètres cinématiques inutiles.** Ici, on ne souhaite garder que $\dot{\theta}(t)$ et $\dot{\lambda}(t)$. On va donc chercher à supprimer $\dot{\alpha}(t)$ et $\dot{\gamma}(t)$.

$$(\text{Proj.sur } \overrightarrow{x_0}) \Leftrightarrow 0 = -\lambda(t)\dot{\alpha}(t) + R(\dot{\alpha}(t) - \dot{\theta}(t))\cos(\theta(t)) \quad \text{En utilisant (22)} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\alpha}(t) = \frac{R\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t))}{R\cos(\theta(t)) - \lambda(t)} \tag{25}$$

$$(\text{Proj.sur } \overrightarrow{y_0}) \Leftrightarrow 0 = -\dot{\lambda}(t) + R(\dot{\alpha}(t) - \dot{\theta}(t))\sin(\theta(t)) \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{R} + \dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \tag{27}$$

En rassemblant (25) et (27) :

$$\frac{R\dot{\theta}(t)\cos(\theta(t))}{R\cos(\theta(t)) - \lambda(t)} = \frac{-\dot{\lambda}(t)}{R} - \dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \tag{28}$$

$$\boxed{\dot{\lambda}(t) = R\dot{\theta}(t)\left(\frac{\cos(\theta(t))}{\cos(\theta(t)) - \frac{\lambda(t)}{R}} - \sin(\theta(t))\right)} \tag{29}$$

(On remarque que l'expression n'est pas la même qu'avec la méthode précédente, car il faudrait exprimer $\lambda(t)$ en fonction de $\theta(t)$. Mais cela est rarement demandé.)