Corrigé

DEVOIR - MAISON

Modèles de pression d'un coussinet

Présentation

Pour réaliser des liaisons pivots par glissement, l'utilisation de coussinets nécessite un dimensionnement de ces derniers. Nous avons vu dans les cours précédents que chaque coussinet ne devait pas dépasser certaines limites :

- limite sur la **pression** de contact (p_{adm}),
- limite sur la **vitesse circonférentielles** (V)
- limite sur la **puissance surfacique** dissipée ($p \times V$),

Le coussinet étudié ici possède les caractéristiques suivantes :

- $\varnothing D = 20\,\text{mm}$
- $L = 50\,\text{mm}$
- $p_{adm} = 20\,\text{MPa}$

Dans les cours précédents, nous avons vu que la pression de contact maximale subie par le coussinet pouvait être approchée par la *pression diamétrale*. Ce modèle de « pression diamétrale » considère que le contact arbre/coussinet se fait sur une zone rectangulaire, projection du cylindre de contact sur un plan contenant l'axe de l'arbre.

Or, en l'absence de moment sur le coussinet, d'autres modèles plus proche de la réalité sont proposés (fig.1) :

- celui d'une **répartition "uniforme"**, dont la densité surfacique d'effort est uniforme sur toute un moitié du coussinet :

$$\overrightarrow{f_{P(arbre \to coussinet)}} = p_U\ \overrightarrow{u_r} \qquad \forall \theta \in [-\pi; 0] \text{ et } \forall z \in [-L; 0] \tag{1}$$

  où p_U est une constante.
- celui d'une **répartition "en sinus"**, dont la densité surfacique d'effort est définie pour un point P par :

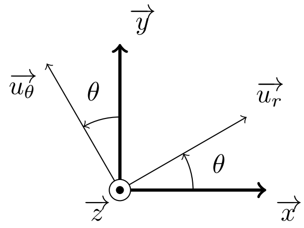
$$\overrightarrow{f_{P(arbre \to coussinet)}} = -p_{max} \sin(\theta) \overrightarrow{u_r} \qquad \forall \theta \in [-\pi; 0] \text{ et } \forall z \in [-L; 0] \tag{2}$$

  où p_{max} est une constante, et correspond à la contrainte maximale (densité maximale d'effort).

Questions

Q1. ***Déterminer littéralement le torseur (résultante + moment) au point O dans le modèle de « répartition uniforme » par la méthode des intégrales, en fonction de p_U et des dimensions. Comparer la résultante avec le modèle de « pression diamétrale ».***

Faisons une figure plante :



• **Calculons la résultante :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{R}_{(arbre\to coussinet)}} &= \int\int_{\text{demi-cylindre}} \overrightarrow{f_{P(arbre\to coussinet)}}\mathrm{d}S \\
&= \int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0} p_U\ \overrightarrow{u_r}\mathrm{d}zR\mathrm{d}\theta \\
&= p_U R \int_{-\pi}^{0} \overrightarrow{u_r}\left(\int_{-L}^{0}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta \\
&= p_U RL \int_{-\pi}^{0} \overrightarrow{u_r}\mathrm{d}\theta \\
&= p_U RL \int_{-\pi}^{0} \left(\cos(\theta)\overrightarrow{x} + \sin(\theta)\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= p_U RL \left[\sin(\theta)\overrightarrow{x} - \cos(\theta)\overrightarrow{y}\right]_{-\pi}^{0} \\
&= p_U RL \left(\left(\sin(0)\overrightarrow{x} - \cos(0)\overrightarrow{y}\right) - \left(\sin(-\pi)\overrightarrow{x} - \cos(-\pi)\overrightarrow{y}\right)\right) \\
&= p_U RL \left(\left(\overrightarrow{0} - 1\overrightarrow{y}\right) - \left(\overrightarrow{0} - (-1)\overrightarrow{y}\right)\right) \\
&= \boxed{-2p_U RL\overrightarrow{y}}
\end{aligned}$$

Note : le résultat obtenu est $\boxed{\text{identique au modèle de « pression diamétral »}}$: $p_U = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\mathscr{R}_{(arbre\to coussinet)}}\right\|}{LD}$

• **Calculons le moment en O :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_{arbre_{(coussinet\to=)}}} & \int\int_{\text{demi-cylindre}} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\overrightarrow{f_{P(arbre\to coussinet)}}\mathrm{d}S\right) \\
&= \int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0} \left(z\overrightarrow{z} + R\overrightarrow{u_r}\right)\wedge\left(p_U\ \overrightarrow{u_r}\right)\mathrm{d}zR\mathrm{d}\theta \\
&= p_U R \int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0} z\overrightarrow{u_\theta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= p_U R \int_{-\pi}^{0}\left[\frac{z^2}{2}\overrightarrow{u_\theta}\right]_{-L}^{0}\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{p_U RL^2}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(\overrightarrow{u_\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{p_U RL^2}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(-\sin(\theta)\overrightarrow{x} + \cos(\theta)\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{p_U RL^2}{2}\left[\cos(\theta)\overrightarrow{x} + \sin(\theta)\overrightarrow{y}\right]_{-\pi}^{0} \\
&= -\frac{p_U RL^2}{2}\times 2\overrightarrow{x} \\
&= \boxed{-p_U RL^2\overrightarrow{x}}
\end{aligned}$$

Q2. ***De même, déterminer littéralement le torseur au point O dans le modèle de « répartition***

en sinus » par la méthode des intégrales, en fonction de p_{max} et des dimensions.

- **Calculons la résultante :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{R}_{(arbre\to coussinet)}} &= \int\int_{\text{demi-cylindre}} \overrightarrow{f_{P(arbre\to coussinet)}}\mathrm{d}S \\
&= \int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0} (-p_{max})\sin(\theta)\overrightarrow{u_r}\mathrm{d}zR\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}R\int_{-\pi}^{0}\sin(\theta)\overrightarrow{u_r}\left(\int_{-L}^{0}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}RL\int_{-\pi}^{0}\sin(\theta)\overrightarrow{u_r}\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}RL\int_{-\pi}^{0}\left(\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{x}+\sin^2(\theta)\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}RL\int_{-\pi}^{0}\left(\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{x}+\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}RL\left[\frac{\sin^2(\theta)}{2}\overrightarrow{x}+\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(2\theta)}{4}\right)\overrightarrow{y}\right]_{-\pi}^{0} \\
&= -p_{max}RL\frac{\pi}{2}\overrightarrow{y} \\
&= \boxed{-\frac{\pi p_{max}RL}{2}\overrightarrow{y}}
\end{aligned}$$

- **Calculons le moment en O :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_{arbre_{(coussinet\to=)}}} & \int\int_{\text{demi-cylindre}} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\overrightarrow{f_{P(arbre\to coussinet)}}\mathrm{d}S\right) \\
&= \int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0}(z\overrightarrow{z}+R\overrightarrow{u_r})\wedge((-p_{max})\sin(\theta)\overrightarrow{u_r})\,\mathrm{d}zR\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}R\int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0} z\sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}R\int_{-\pi}^{0}\int_{-L}^{0} z\left(-\sin^2(\theta)\overrightarrow{x}+\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= -p_{max}R\int_{-\pi}^{0}\left(-\sin^2(\theta)\overrightarrow{x}+\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{y}\right)\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-L}^{0}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{p_{max}RL^2}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{-1+\cos(2\theta)}{2}\overrightarrow{x}+\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{y}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{p_{max}RL^2}{2}\left[\left(\frac{-\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\right)\overrightarrow{x}+\frac{\sin^2(\theta)}{2}\overrightarrow{y}\right]_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\theta \\
&= \boxed{-\frac{\pi p_{max}RL^2}{4}\overrightarrow{x}}
\end{aligned}$$

Un calcul de statique a permis de déterminer numériquement la résultante de l'arbre sur le coussinet :

$$\overrightarrow{\mathscr{R}_{(arbre\to coussinet)}} = -1000\overrightarrow{y} \tag{3}$$

Q3. ***En déduire numériquement p_U et p_{max}.***

- **Répartition uniforme :**

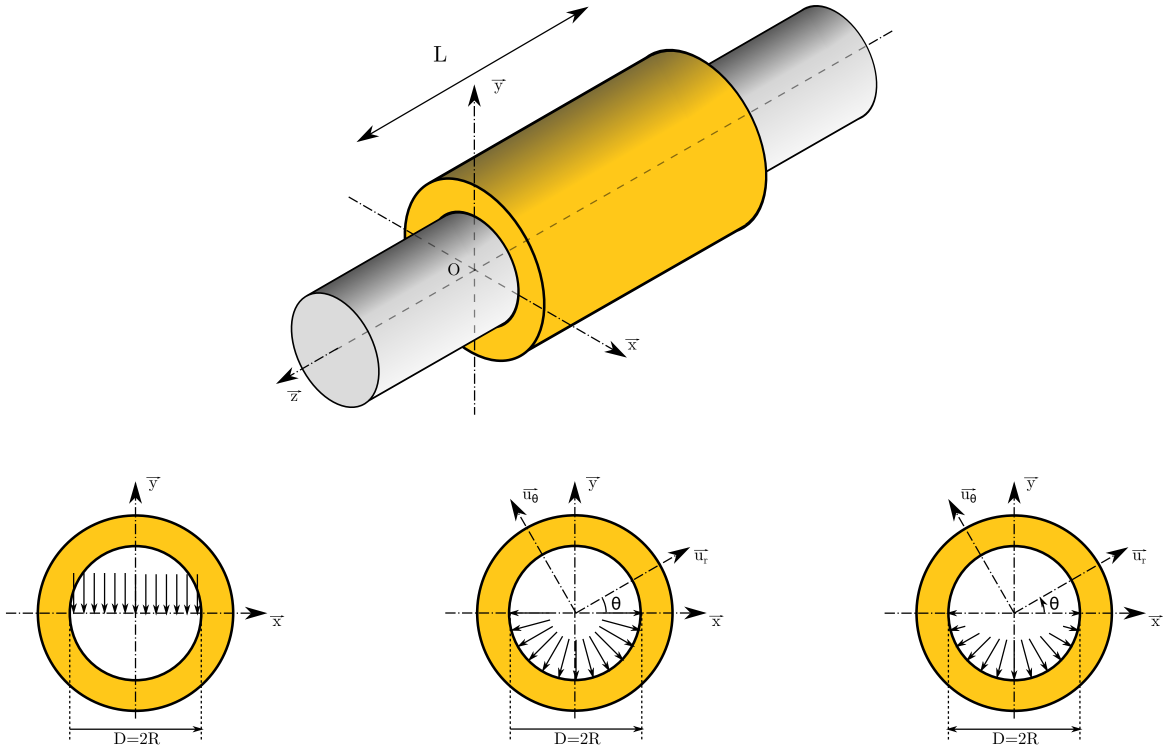
$$\left\|\overrightarrow{\mathscr{R}_{(arbre\rightarrow coussinet)}}\right\| = 2p_U RL = 1000$$
$$\Leftrightarrow p_U = \frac{1000}{2RL} = \boxed{1{,}0\,\text{MPa}}$$

- **Répartition « en sinus » :**

$$\left\|\overrightarrow{\mathscr{R}_{(arbre\rightarrow coussinet)}}\right\| = \frac{\pi p_{max} RL}{2} = 1000$$
$$\Leftrightarrow p_{max} = \frac{2\times 1000}{\pi RL} = \boxed{1{,}3\,\text{MPa}}$$

Q4. ***En vous basant sur les résultats précédents, selon vous, quel modèle est le plus « dimensionnant » (i. e. Le plus contraignant en terme de dimensionnement vis à vis de la pression admissible) ?***

Le modèle « en sinus » donne un pression maximale plus importante que le modèle uniforme. C'est donc lui qui est le plus « dimensionnant ». En effet, on aura intérêt à utiliser ce modèle pour dimensionner d'autres coussinets car la pression maximale estimée y est plus importante. Cela imposera de dimensionner des coussinets plus longs pour être sûr de ne pas dépasser la pression admissible réelle du matériau.



Pression diamétrale — Répartition uniforme — Répartition "en sinus"

Figure 1