DEVOIR - MAISON
Bras Robot Ericc
Correction

(/2) **Q1.** ***Écrire les quatre équations différentielles dans le domaine de Laplace.***

- **Equation** (1) **:**

$$\begin{aligned} & u_e(t) = e(t) + Ri(t) \\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{L}\left[u_e(t)\right] = \mathscr{L}\left[e(t)\right] + R\mathscr{L}\left[i(t)\right] && \text{(par linéarité)} \\ \Leftrightarrow\ & U_e(p) = E(p) + RI(p) \end{aligned}$$

- **Equation** (2) **:**

$$\begin{aligned} & J\,\frac{\mathrm{d}\omega_s(t)}{\mathrm{d}t} = c_m(t) - f\omega_s(t) \\ \Leftrightarrow\ & J\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}\omega_s(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathscr{L}\left[c_m(t)\right] - f\mathscr{L}\left[\omega_s(t)\right] && \text{(par linéarité)} \\ \Leftrightarrow\ & Jp\Omega_s(p) = C_m(p) - f\Omega_s(p) && \text{(Car conditions initiales nulles)} \end{aligned}$$

- **Equation** (3) **:**

$$\begin{aligned} & c_m(t) = K_c i(t) \\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{L}\left[c_m(t)\right] = K_c\mathscr{L}\left[i(t)\right] && \text{(par linéarité)} \\ \Leftrightarrow\ & C_m(p) = K_c I(p) \end{aligned}$$

- **Equation** (4) **:**

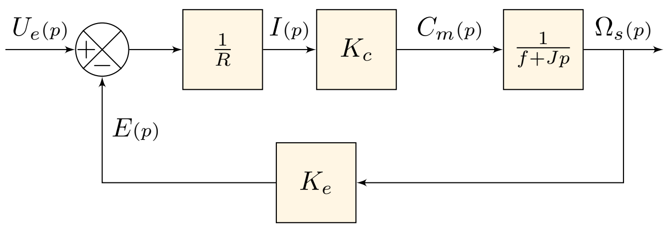
$$\begin{aligned} & e(t) = K_e\omega_s(t) \\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{L}\left[e(t)\right] = K_e\mathscr{L}\left[\omega_s(t)\right] && \text{(par linéarité)} \\ \Leftrightarrow\ & E(p) = K_e\Omega_s(p) \end{aligned}$$

(/2) **Q2.** ***Compléter le schéma-bloc***

On a :

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{1}{R}\left(U_e(p) - E(p)\right) \\ \Omega_s(p) &= \frac{1}{f+Jp}C_m(p) \\ C_m(p) &= K_c I(p) \\ E(p) &= K_e\Omega_s(p) \end{aligned}$$

d'où :



(/2) **Q3.** ***Calculer*** $H_{(p)}$

D'après le schéma-bloc précédent (boucle fermée) :

$$\begin{aligned} H_{(p)} = \frac{\Omega_{m(p)}}{U_{e(p)}} &= \frac{\frac{K_c}{R(f+Jp)}}{1+\frac{K_e K_c}{R(f+Jp)}} \\ &= \frac{K_c}{R(f+Jp)+K_e K_c} \end{aligned}$$

(/2) **Q4.** ***Déterminer l'ordre et les paramètres caractéristiques***

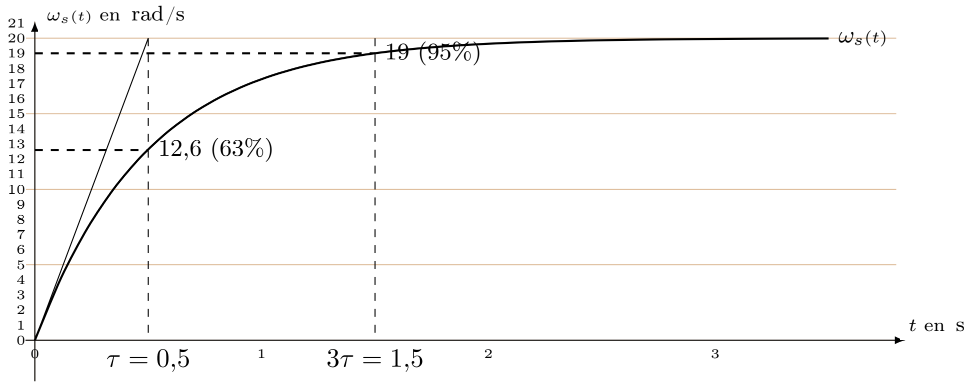
La fonction de transfert est du 1er ordre, et peut se mettre sous forme canonique :

$$\begin{aligned} H_{(p)} &= \frac{K_c}{RJp+(K_e K_c+Rf)} \\ &= \frac{\frac{K_c}{K_e K_c+Rf}}{\frac{RJ}{K_e K_c+Rf}p+1} \\ &= \frac{K}{1+\tau p} \end{aligned}$$

On en déduit les coefficients caractéristiques :

$$\begin{aligned} K &= \frac{K_c}{K_e K_c+Rf} \\ \tau &= \frac{RJ}{K_e K_c+Rf} \end{aligned}$$

(/2) **Q5.** ***Tracer l'allure de la courbe :***



(/1) **Q6.** ***Quelle relation y a-t-il entre*** $\omega_{s(t)}$ ***et*** $\theta_{s(t)}$ ***?***

La vitesse de rotation $\omega_{s(t)}$ est la dérivée de la position angulaire $\theta_{s(t)}$. On en déduit que :

$$\omega_{s(t)} = \frac{\mathrm{d}\theta_{s(t)}}{\mathrm{d}t}$$

Dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned} \Omega_{s(p)} &= p\Theta_{s(p)} && \text{(car conditions initiales nulles)} \\ \Theta_{s(p)} &= \frac{1}{p}\Omega_{s(p)} \end{aligned}$$

(/1) **Q7.** ***Exprimer*** $G_{(p)}$

D'après ce qui précède :

$$G_{(p)} = \frac{K}{p(1+\tau p)}$$

(/2) **Q8.** ***Déterminer la réponse indicielle***

On cherche $\theta_{s(t)}$ pour $u_{e(t)} = 1\,\mathrm{V}$, soit $U_{e(p)} = \frac{1}{p}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Theta_{s(p)} &= G_{(p)} \times \frac{1}{p} && (1)\\
&= \frac{K}{p^2(1+\tau p)} && (2)\\
&= \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{1+\tau p} \qquad \text{(par décomposition en éléments simples)} && (3)
\end{aligned}$$

Déterminons A :

$$\begin{aligned}
\lim_{p \mapsto 0} p^2 \times \Theta_{s(p)} &= A\\
&= K
\end{aligned}$$

Déterminons C :

$$\begin{aligned}
\lim_{p \mapsto -\frac{1}{\tau}} (1+\tau p) \times \Theta_{s(p)} &= C\\
&= K\tau^2
\end{aligned}$$

Déterminons B :

$$\begin{aligned}
\lim_{p \mapsto +\infty} p \times \Theta_{s(p)} &= B + \frac{C}{\tau} = B + K\tau\\
&= 0\\
&\Leftrightarrow B = -K\tau
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Theta_{s(p)} &= \frac{K}{p^2} - \frac{K\tau}{p} + \frac{K\tau^2}{1+\tau p}\\
&= \frac{K}{p^2} - \frac{K\tau}{p} + \frac{K\tau}{\frac{1}{\tau} + p}
\end{aligned}$$

Dans le domaine temporel, on obtient :

$$\begin{aligned}
\theta_{s(t)} &= Kt\mathbf{u(t)} - K\tau\mathbf{u(t)} + K\tau e^{\frac{-t}{\tau}}\mathbf{u(t)}\\
&= K\left(t + \tau\left(e^{\frac{-t}{\tau}} - 1\right)\right)\mathbf{u(t)}
\end{aligned}$$

(/1,5) **Q9.** ***Déterminer*** $F_{(p)}$

Le schéma bloc représente un système en boucle fermée. D'où :

$$\begin{aligned}
F_{(p)} &= \frac{\frac{K}{p(1+\tau p)}}{1 + \frac{KA}{p(1+\tau p)}}\\
&= \frac{K}{p(1+\tau p) + KA}
\end{aligned}$$

(/1) **Q10.** ***Montrer que*** $F_{(p)}$ ***est une fonction du*** $2^{\text{ème}}$ ***ordre en la mettant sous forme canonique.***

$$F_{(p)} = \frac{K}{p(1+\tau p) + KA} = \frac{\frac{1}{A}}{\frac{\tau}{KA}p^2 + \frac{1}{KA}p + 1} = \frac{K_1}{\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_0}p + 1}$$

(/3) $\boxed{\textbf{Q11.}}$ ***Calculer K_1, ω_0 et z.***

D'après ce qui précède :

$$K_1 = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau}{KA}$$
$$\Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{KA}{\tau}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{KA} &= \frac{2z}{\omega_0} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\omega_0}{2KA} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{KA}{\tau}}}{2KA} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1}{2\sqrt{\tau KA}} \end{aligned}$$

(/3) $\boxed{\textbf{Q12.}}$ ***Identifier les paramètres caractéristiques***

D'après la courbe, la valeur finale est 0,5. D'où :

$$1 \times K_1 = 0{,}5 \Rightarrow K_1 = 0{,}5\,\mathrm{rad/V}$$

Le premier dépassement vaut $D_1 = 0{,}64 - 0.5 = 0{,}14\,\mathrm{rad}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} D_1 = 0{,}14 &= 0{,}5e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} &= 0{,}28 \\ \Leftrightarrow -\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}} &= ln(0{,}28) \\ \Leftrightarrow z^2\pi^2 &= ln(0{,}28)^2(1-z^2) \\ \Leftrightarrow z^2(\pi^2 + ln(0{,}28)^2) &= ln(0{,}28)^2 \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt{-\frac{ln(0{,}28)^2}{\pi^2 + ln(0{,}28)^2}} \\ z &\approx 0{,}38 \end{aligned}$$

Le temps de premier dépassement est $t_1 = 2\,\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned} t_1 = 2 &= \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} \\ \Leftrightarrow \omega_0 &= \frac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}} \\ \omega_0 &\approx 2{,}8\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\begin{aligned} F_{(p)} &\approx \frac{0{,}5}{\frac{1}{2{,}8^2}p^2 + \frac{2\times 0{,}38}{2{,}8}p + 1} \\ &\approx \frac{0{,}5}{0{,}13p^2 + 0{,}27p + 1} \end{aligned}$$